

Une note sur l'article de S. Takahashi

TRAN Duc-Anh *

Résumé

Nous démontrons que la condition nécessaire et suffisante de S. Takahashi pour le problème d'interpolation de Nevanlinna-Pick-Carathéodory peut être obtenue de la théorie de D. Sarason.

1 Enoncé du problème d'interpolation de Nevanlinna-Pick-Carathéodory

Il faut dire que cette dénomination de ce problème d'interpolation n'est pas standard et en réalité, dans l'article de S. Takahashi[2], elle l'appelle par un autre nom. Voici l'énoncé du problème.

Soit \mathbb{D} le disque unité dans \mathbb{C} . Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ N points distincts dans \mathbb{D} . A chaque α_i , on associe n_i nombres complexes $c_{i0}, c_{i1}, \dots, c_{i, n_i-1}$.

Problème *Quelles sont les conditions pour qu'il existe une fonction holomorphe $\phi: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ telle que*

$$(1) \quad \phi(z) = \sum_{j=0}^{n_i-1} (z - \alpha_i)^j + O((z - \alpha_i)^{n_i}) \quad (i = 1 \dots N)?$$

2 Condition de S. Takahashi

Dans cette section, nous citons la condition nécessaire et suffisante dans l'article de S. Takahashi[2].

D'abord, on associe aux deux points α_i et α_j la matrice Γ_{ij} de façon suivante. On considère le développement suivant

$$\frac{1}{1 - z\bar{\zeta}} = \sum_{k,l \geq 0} a_{kl} (z - \alpha_i)^k (\bar{\zeta} - \bar{\alpha}_j)^l.$$

Posons alors

$$\Gamma_{ij} = \begin{pmatrix} a_{00} & \cdots & a_{0, n_j-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n_i-1, 0} & \cdots & a_{n_i-1, n_j-1} \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \cdots & \Gamma_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{N1} & \cdots & \Gamma_{NN} \end{pmatrix}.$$

Ensuite, posons

$$C_i = \begin{pmatrix} c_{i0} & \cdots & c_{i, n_i-1} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{i, n_i-1} & \cdots & c_{i0} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C_1 & & \\ & \ddots & \\ & & C_N \end{pmatrix},$$

et finalement

$$(2) \quad \boxed{A = \Gamma - C \cdot \Gamma \cdot C^*}$$

où C^* est la matrice transposée conjuguée de C . Remarquons que A est une matrice carrée hermitienne de taille $n_1 + n_2 + \dots + n_N$.

*Department of Mathematics, Hanoi National University of Education, 136 Xuan Thuy St., Hanoi, Vietnam
ducanh@hnue.edu.vn

Théorème 3 (Condition de S. Takahashi). *Pour qu'il existe une fonction ϕ qui satisfait à (1), la condition nécessaire et suffisante est que la matrice A ci-dessus est positive semi-définie.*

3 Une autre démonstration en utilisant la théorie de D. Sarason

Dans cette section, nous montrons que la condition de S. Takahashi est une conséquence de la théorie de D. Sarason [1]. Nous commençons par quelques notations.

Notons H^2 et H^∞ les espaces de Hardy sur le disque \mathbb{D} . Notons $S: H^2 \rightarrow H^2$ le décalage à droite, i.e. $(Sf)(z) = zf(z)$ pour toute $f \in H^2$. Pour chaque $\phi \in H^\infty$, notons $M_\phi: H^2 \rightarrow H^2$ l'opérateur de multiplication par ϕ , i.e. $M_\phi f = \phi f$ pour toute $f \in H^2$, et notons M_ϕ^* l'adjointe de M_ϕ . Pour $f, g \in H^2$, $\langle f, g \rangle$ désigne le produit scalaire dans H^2 . Et finalement, posons

$$\psi(z) = \prod_{i=1}^N \left(\frac{z - \alpha_i}{1 - \bar{\alpha}_i z} \right)^{n_i}$$

pour $z \in \mathbb{D}$. Remarquons que ψ est une fonction intérieure, et elle jouera le même rôle que la fonction ψ dans [1].

D'abord, on cherche des fonctions h qui permettent de reproduire les dérivées à certain point du disque \mathbb{D} , i.e. pour $f \in H^2$,

$$\langle f, h \rangle = f^{(m)}(\alpha)$$

pour $\alpha \in \mathbb{D}$ et $m \in \mathbb{N}$ fixés.

Pour cela, on utilise l'intégrale de Cauchy. Par un argument de limite, on peut supposer que les fonctions de H^2 sont définies sur le cercle unité \mathbb{T} . Soient $f \in H^2$, $\alpha \in \mathbb{D}$ et $m \in \mathbb{N}$. Par l'intégrale de Cauchy, on a

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{f(z)}{z - \alpha} dz.$$

On a donc

$$f^{(m)}(\alpha) = \frac{m!}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{f(z)}{(z - \alpha)^{m+1}} dz.$$

On transforme cette intégrale en une intégrale de Lebesgue sur le cercle \mathbb{T} comme suit

$$\begin{aligned} \frac{f^{(m)}(\alpha)}{m!} &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{(e^{i\theta} - \alpha)^{m+1}} i e^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{(1 - e^{-i\theta} \alpha)^{m+1}} e^{-(m+1)i\theta} e^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{(1 - e^{-i\theta} \alpha)^{m+1}} e^{-mi\theta} d\theta \\ &= \left\langle f, \frac{z^m}{(1 - \bar{\alpha}z)^{m+1}} \right\rangle. \end{aligned}$$

Posons alors

$$k_{\alpha,m}(z) = \frac{z^m}{(1 - \bar{\alpha}z)^{m+1}}$$

et il est facile de voir que $k_{\alpha,m}$ permet de reproduire le coefficient du terme $(z - \alpha)^m$ du développement de Taylor de $f \in H^2$.

Posons ensuite

$$K = \text{span}\{k_{\alpha_i,m} : 0 \leq m \leq n_i - 1, 1 \leq i \leq N\}$$

et il est facile de voir que $\dim K = n_1 + \dots + n_N$ et que $K = H^2 \ominus \psi H^2$.

Maintenant, supposons que ϕ est la fonction interpolant (1). Il nous faut calculer l'action de M_ϕ^* sur K . Pour cela, prenons une fonction test $f \in H^2$, et on a

$$\begin{aligned}\langle f, M_\phi^* k_{\alpha,m} \rangle &= \frac{(\phi f)^{(m)}(\alpha)}{m!} = \sum_{i=0}^m \frac{C_m^i \phi^{(m-i)}(\alpha) f^{(i)}(\alpha)}{m!} \\ &= \sum_{i=0}^m \frac{\phi^{(m-i)}(\alpha)}{(m-i)!} \frac{f^{(i)}(\alpha)}{i!} \\ &= \left\langle f, \sum_{i=0}^m \frac{\overline{\phi^{(m-i)}(\alpha)}}{(m-i)!} \cdot k_{\alpha,i} \right\rangle.\end{aligned}$$

Donc

$$M_\phi^* k_{\alpha,m} = \sum_{i=0}^m \frac{\overline{\phi^{(m-i)}(\alpha)}}{(m-i)!} \cdot k_{\alpha,i}.$$

Posons

$$D_i = \begin{pmatrix} \bar{c}_{i0} & \bar{c}_{i1} & \cdots & \bar{c}_{i,n_i-2} & \bar{c}_{i,n_i-1} \\ & \bar{c}_{i0} & \bar{c}_{i1} & \cdots & \bar{c}_{i,n_i-2} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & \bar{c}_{i0} \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} D_1 & & \\ & \ddots & \\ & & D_N \end{pmatrix}.$$

On peut voir que D est la matrice de $M_\phi^*: K \rightarrow K$ dans la base $\{k_{\alpha_i,m} : 1 \leq i \leq N, 0 \leq m \leq n_i - 1\}$.

Maintenant, on cherche des conditions pour qu'il existe ϕ interpolant (1). Posons $T: K \rightarrow K$ un endomorphisme qui satisfait au fait que

$$T k_{\alpha_i,m} = \sum_{k=0}^m \bar{c}_{ik} \cdot k_{\alpha_i,k},$$

autrement dit que T a pour matrice représentante D dans la base $\{k_{\alpha_i,m} : 1 \leq i \leq N, 0 \leq m \leq n_i - 1\}$. Il n'est pas difficile de voir la commutativité de T avec le décalage à gauche $S^*: K \rightarrow K$.

Condition d'interpolation Par la théorie de D. Sarason[1], la condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une fonction ϕ interpolant (1) est que T doit être une contraction, cela dit $1 - T^*T \geq 0$.

C'est équivalent au caractère positif semi-défini de la matrice suivante

$$[\langle (1 - T^*T)v_i, v_j \rangle]_{1 \leq i,j \leq n_1 + \dots + n_N}$$

avec $\{v_1, \dots, v_{n_1 + \dots + n_N}\}$ certaine base de K . C'est-à-dire que

$$[\langle v_i, v_j \rangle - \langle T v_i, T v_j \rangle]_{1 \leq i,j \leq n_1 + \dots + n_N} \geq 0.$$

Soit G la matrice de Gram de la base $\{k_{\alpha_i,m} : 1 \leq i \leq N, 0 \leq m \leq n_i - 1\}$.

La condition nécessaire et suffisante est donc

$$(4) \quad \boxed{G - D^T G D \geq 0}.$$

On précise les entrées de

$$G = \begin{pmatrix} G_{11} & \cdots & G_{1N} \\ & \ddots & \\ G_{N1} & \cdots & G_{NN} \end{pmatrix}$$

où

$$G_{ij} = \begin{pmatrix} \langle k_{\alpha_i,0}, k_{\alpha_j,0} \rangle & \cdots & \langle k_{\alpha_i,0}, k_{\alpha_j,n_j-1} \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle k_{\alpha_i,n_i-1}, k_{\alpha_j,0} \rangle & \cdots & \langle k_{\alpha_i,n_i-1}, k_{\alpha_j,n_j-1} \rangle \end{pmatrix}$$

pour tous $1 \leq i, j \leq N$.

4 Comparaison avec la condition de S. Takahashi

On voit immédiatement que $D = C^*$. Maintenant, on montre que $G = \bar{\Gamma}$.
 Pour faire cela, il faut calculer le produit scalaire suivant

$$\begin{aligned}\langle k_{\alpha,m}, k_{\beta,n} \rangle &= \left\langle \frac{z^m}{(1 - \bar{\alpha}z)^{m+1}}, \frac{z^n}{(1 - \bar{\beta}z)^{n+1}} \right\rangle \\ &= \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} \Big|_{z=\beta} \frac{z^m}{(1 - \bar{\alpha}z)^{m+1}}.\end{aligned}$$

Quand $\alpha = \alpha_i$ et $\beta = \alpha_j$, cette valeur est l'entrée en position (m, n) de G_{ij} .

Ensuite, considérons l'entrée de même position de Γ_{ij} . C'est le coefficient a_{mn} dans le développement

$$\frac{1}{1 - z\bar{\zeta}} = \sum_{k,l \geq 0} a_{kl} (z - \alpha)^k (\bar{\zeta} - \bar{\beta})^l.$$

On remarque que

$$\begin{aligned}\sum_{i \geq 0} a_{mi} (\bar{\zeta} - \bar{\beta})^i &= \frac{1}{m!} \frac{d^m}{dz^m} \Big|_{z=\alpha} \frac{1}{1 - z\bar{\zeta}} \\ &= \frac{\bar{\zeta}^m}{(1 - z\bar{\zeta})^{m+1}} \Big|_{z=\alpha} = \frac{\bar{\zeta}^m}{(1 - \alpha\bar{\zeta})^{m+1}}.\end{aligned}$$

Donc

$$a_{mn} = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\bar{\zeta}^n} \Big|_{\bar{\zeta}=\beta} \frac{\bar{\zeta}^m}{(1 - \alpha\bar{\zeta})^{m+1}} = \overline{\langle k_{\alpha,m}, k_{\beta,n} \rangle}.$$

On déduit que $G = \bar{\Gamma}$ et que

$$G - D^T G \bar{D} = \bar{\Gamma} - \bar{C} \bar{\Gamma} C^*,$$

i.e. les deux conditions sont identiques.

Remerciement Nous remercions Monsieur Pascal Thomas pour nous envoyer l'article de S. Takahashi.

Références

- [1] Sarason, Donald. *Generalized interpolation in H^∞* . Trans. Amer. Math. Soc. **127** 1967 179–203.
- [2] Takahashi, Sechiko. *Extension of the theorems of Carathéodory-Toeplitz-Schur and Pick*. Pacific J. Math. **138** (1989), no. 2, 391–399.